
1996 ULUSAL ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI İKİNCİ AŞAMA SORULARI

1. $(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2$ denkleminin tüm (reel) çözümlerini bulunuz.

2. $u_1 = 1, u_2 = 1$ ve her $k \geq 1$ için $u_{k+2} = u_k + u_{k+1}$ olarak tanımlanan (u_n) dizisi Fibonacci dizisi olarak bilinir. Her $k \geq 1$ için u_{5k} 'nin 5 ile tam bölündüğünü gösteriniz.

3. 2'den büyük bir x reel sayısı verilmiş olsun. Osman, 1997 tane etiketin her biri üzerine, farklı etiketlere farklı sayılar yazmak koşuluyla, $1, x, x^2, x^3, \dots, x^{1995}, x^{1996}$ sayılarından birini yazıyor. Sonra bu etiketlerden bir kısmını sağ cebine, bir kısmını sol cebine koyuyor ve kalanları da çöp kutusuna atıyor. Osman'ın sağ cebindeki sayıların toplamı ile sol cebindeki sayıların toplamının asla birbirine eşit olamayacağını kanıtlayınız.

4. Düzlem üzerinde öyle 25 nokta verilmiş olsun ki, bu noktalardan herhangi üç tanesi alındığında, bu üç noktanın en az ikisinin aralarındaki uzaklık 1 cm'den küçük olsun. Verilen 25 noktadan en az 13 tanesinin, yarıçapı 1 cm olan bir daire içinde olduğunu kanıtlayınız.

5. Merkezleri O_1 ve O_2 noktalarında olan iki çember M ve N noktalarında kesişiyorlar (çemberlerin yarıçapları farklı olabilir). O_1M doğrusu birinci çemberi A_1 , ikinci çemberi de A_2 noktasında; O_2M doğrusu ise birinci çemberi B_1 , ikinci çemberi de B_2 noktasında kesiyor. A_1B_1, A_2B_2 ve MN doğrularının bir noktada kesiştiklerini kanıtlayınız.