1997 ULUSAL ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI İKİNCİ AŞAMA SORULARI

Lise 1 Sınav Soruları

1. $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$x^2 + (m-4)\,x + \left(m^2 - 3m + 3\right) = 0$$

denkleminin iki reel kökü x_1 ve x_2'dir. $x_1^2 + x_2^2 = 6$ olduğuna göre, m'nin alabileceği değerleri bulunuz.

2. x ve y herhangi pozitif reel sayılar olmak üzere,

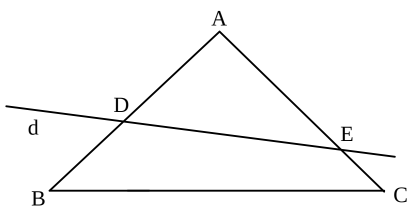
$$x^2\sqrt{\frac{x}{y}} + y^2\sqrt{\frac{y}{x}} \geq x^2 + y^2$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

3. Her $k \in \mathbb{N}$ için k'nın rakamları toplamını $T(k)$ ile gösterelim. Bir n doğal sayısı için $T(n) = T(1997n)$ ise n sayısının 9'un bir katı olduğunu kanıtlayınız.

4. Düzlem, satranç tahtasında olduğu gibi karelere bölünmüş ve her kare içine bir doğal sayı yazılmıştır. Şöyle ki, her karedeki sayı dört komşu karedeki (üstteki, alttaki, sağdaki ve soldaki) sayıların aritmetik ortalamasına eşittir. Karelere yazılmış olan tüm sayıların birbirine eşit olduğunu gösteriniz.

5. $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni bir d doğrusu tarafından eşit alanlı iki parçaya ayrılıyor. d doğrusu, [AB]'yi D ve [AC]'yi E noktasında kesiyor (şekilden izleyiniz).



$$\frac{|AD| + |AE|}{|BD| + |DE| + |EC| + |CB|} > \frac{1}{4}$$

olduğunu gösteriniz.

Lise 2 Sınav Soruları

1. $15x^2 - 7y^2 = 9$ denkleminin tamsayılarda hiç çözümü bulunmadığını gösteriniz.

2. x, y, z, t reel sayılar ve $1 \leq x \leq y \leq z \leq t \leq 100$ olmak üzere, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{z}{t}$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

3. $x_1 = 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$ ile tanımlanan dizinin ikinciden itibaren tüm terimlerinin doğal sayılar olduğunu kanıtlayınız.

4. Bir düzgün 1997-genin her köşesine bir pozitif reel sayı yazılmıştır. Şöyle ki, her bir sayı, "sağında" ve "solunda" yazılmış olan komşularının aritmetik veya geometrik ortalamasına eşittir. Köşelerde yazılmış olan tüm sayıların birbirine eşit olduğunu gösteriniz.

5. $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni bir d doğrusu tarafından eşit alanlı ve eşit çevreli iki parçaya ayrılıyor (Şekilden izleyiniz). d doğrusunun $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin içteğet çemberinin merkezinden geçtiğini gösteriniz.