

---

# 1998 ULUSAL ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI İKİNCİ AŞAMA SORULARI

---

## Lise 1—2 Sınav Soruları

1. Dört ardışık doğal sayının çarpımının asla bir tamkare (yani başka bir doğal sayının karesi) olamayacağını kanıtlayınız.

2. Yarıçapı 1 cm olan bir çember üzerinde rastgele 100 tane nokta işaretlenmiştir. Çember üzerinde, bütün işaretlenmiş noktalara olan uzaklıkları toplamı 100 cm'den büyük olacak şekilde en az bir noktanın bulunduğunu gösteriniz.

3.  $x, y, z$  negatif olmayan reel sayılar ve  $x + y + z \leq 3$  ise,  
$$\frac{2}{1+x} + \frac{2}{1+y} + \frac{2}{1+z} \geq 3$$
 olduğunu kanıtlayınız.

4. Kenar uzunluğu 1 cm olan bir  $\triangle ABC$  eşkenar üçgeninin  $[AB]$  kenarı üzerinde rastgele bir  $D$  noktası alınıyor.  $D$ 'nin  $[AC]$  ve  $[BC]$  üzerine dik izdüşümleri, sırasıyla,  $E$  ve  $F$ ;  $E$  ve  $F$ 'nin  $[AB]$  üzerine dik izdüşümleri, sırasıyla,  $E_1$  ve  $F_1$  olsun.  $|E_1F_1| = \frac{3}{4}$  cm olduğunu gösteriniz.

5. Aşağıdaki denklem sistemini (reel sayılar kümesinde) çözünüz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 \\ x_2 + x_3 = x_4^2 \\ x_3 + x_4 = x_1^2 \\ x_4 + x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

## Lise 3 Sınav Soruları

1. Herhangi üç tek doğal sayı verildiğinde öyle dördüncü tek doğal sayı bulunabilir ki, bu dört sayının kareleri toplamı bir tamkare (yani, bir doğal sayının karesi) dir; kanıtlayınız.

2. Kenar uzunluğu 1 cm olan bir kare içine, alanları toplamı  $1997,5 \text{ cm}^2$  olan ve konveks olmaları gerekmeyen 1998 tane çokgen, karenin dışına taşmayacak biçimde rastgele yerleştiriliyor. Karenin en az bir noktasının sözkonusu çokgenlerin hepsi tarafından örtüldüğünü gösteriniz.

3.  $x, y, z$  reel sayılar ve  $x \geq y \geq z > 0$  ise  
$$\frac{x^2 - y^2}{z} + \frac{z^2 - y^2}{x} + \frac{x^2 - z^2}{y} \geq 3x - 4y + z$$
 olduğunu kanıtlayınız.

4. Bir koridorun, boyutları  $2 \times 11$  m olan dikdörtgen biçimindeki tabanı, boyutları  $1 \times 2$  m olan aynı tür halılarla, halılar birbirinin herhangi bir kısmını örtmeksizin, kaplanmak isteniyor. Bu iş kaç farklı biçimde yapılabilir?

5. ABCD konveks (dışbükey) dörtgeninin [BC] ve [CD] kenarlarının orta noktaları, sırasıyla, P ve N olsun. Eğer

$$|AP| + |AN| = d$$

ise, ABCD dörtgeninin alanının  $\frac{1}{2}d^2$  den küçük olduğunu gösteriniz.