

Adı Soyadı
Numara

1	2	3	4	5	TOPLAM

20.04.1999

DİFERENSİYEL GEOMETRİ ARASINAV SORULARI

1-) Aşağıdaki kavramları açıklayınız.

- Afin uzay
- Afin koordinat sistemi
- Öklid uzayı
- Vektör alanı
- Birim hızlı bir eğrinin eğriliği.

2-) $v_p \in T_p(E^n)$ olmak üzere, $f, g \in C^\infty(p)$ iki fonksiyon ise,

$$v_p[f \cdot g] = v_p[f] \cdot g(p) + f(p) \cdot v_p[g]$$

olduğunu ispatlayınız.

3-) α, E^3 de bir eğri olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin s_0 komşuluğunda Taylor serisine açılımını kullanarak, α nın eğriliğinin geometrik yorumunu yapınız.

4-) $\alpha : I \rightarrow E^3, \alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, \sqrt{5}t)$ eğrisi veriliyor.

- α eğrisini yay parametresi cinsinden ifade ediniz.
- Bir eğrinin yay uzunluğu cinsinden ifade edilmesi bize ne avantaj sağlar? Açıklayınız.
- a nın yay uzunluğu parametresine göre ifadesi $\beta(s)$ ise $\beta(s)$ eğrisinin $\beta(0)$ noktasındaki Frenet vektör alanlarını hesaplayınız.

5-) $f : E^3 \rightarrow E^2, f(x, y, z) = (x^2 - y^2 - z, 2x + y + z^2)$ dönüşümü veriliyor, $p = (1, -1, 3), v_p \in T_p(E^3)$ ve $v_p = (2, 0, -1)$ ise $f_{*p}(v_p) = ?$

6-) a) E^n uzayında W vektör alanının v_p tanjant vektörüne göre kovaryant türevini tanımlayınız.

b) $v_p \in T_p(E^n)$ ve $W = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ise $D_{v_p} W = \sum_{i=1}^n v_p[w_i] \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ olduğunu ispatlayınız.

BAŞARILAR

Adı Soyadı
Numara

1	2	3	4	5	TOPLAM

24.04.2000

DİFERENSİYEL GEOMETRİ ARASINAV SORULARI

1-) a) Her $\alpha : I \rightarrow E^n$ regüler eğrisi için $\alpha \circ h : J \rightarrow E^n$ eğrisinin hız vektörü birim vektöre olacak şekilde bir $h : J \rightarrow I$ parametre dönüşümü vardır. İspatlayınız.

b) $\alpha(t) = (e^{-t} \sin t, e^{-t} \cos t, e^{-t})$ eğrisini yay parametresi cinsinden yazınız.

2-) V ve W , \mathcal{K} cisimi üzerinde iki vektör uzayı, A ve B sırasıyla bu vektör uzayları ile birleştirilmiş iki afin uzay olsun.

$$f : A \rightarrow B$$

$$p \rightarrow f(p)$$

ve

$$\varphi_p : V \rightarrow W$$

$$\alpha \rightarrow \varphi_p(\alpha) = \varphi_p(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Buna göre, φ_p ancak bir $p \in A$ için lineer ise $\forall p_1 \in A$ için $\varphi_{p_1} = \varphi_p$ olduğunu ispatlayınız

3-) α , E^3 de bir eğri olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin s_0 komşuluğunda Taylor serisine açılımını kullanarak, α 'nın burulmasının geometrik yorumunu yapınız.

4-) a) $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $p \in E^n$ ve $v_p \in T_p(E^n)$ ise f 'nin v_p yönündeki türevini açıklayınız.

b) $v_p[f] = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ olduğunu ispatlayınız.

5-) a) E^n uzayında bir vektör alanını tanımlayınız.

b) W , E^n de bir vektör alanı ise, $v_p \in T_p(E^n)$ ve $\alpha : I \rightarrow E^n$ eğrisi $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v_p$ olacak şekilde bir eğri ise $\frac{dW}{dt} = D_{v_p}W$ olduğunu gösteriniz.

BAŞARILAR

Adı Soyadı
Numara

1	2	3	4	5	TOPLAM

DİFERENSİYEL GEOMETRİ ARASINAV SORULARI

- 1-) E^n Öklid uzayının bir p noktasındaki tanjant uzayı ($T_p(E^n)$) kavramını açıklayınız.
- 2-) a) E^n ve E^m sırasıyla n ve m -boyutlu Öklid uzayları olmak üzere $f : E^n \rightarrow E^m$ dönüşümünün bir $p \in E^n$ noktasındaki türev dönüşümünü açıklayınız.
b) $f : E^3 \rightarrow E^2$, $f(x, y, z) = (x^2 - xy, xz + y)$ dönüşümü veriliyor, $p = (1, 1, -2)$, $v_p \in T_p(E^3)$ ve $v_p = (2, 1, -3)$ ise $f_{*p}(v_p) = ?$
- 3-) $v_p \in T_p(E^n)$ bir tanjant vektör ve $W = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, E^n de bir vektör alanı ise W nun v_p ye göre kovaryant türevi $D_{v_p}W = \frac{d}{dt}W(p + tv)|_{t=0}$ olarak tanımlanır. Buna göre $D_{v_p}W = \sum_{i=1}^n v_p[w_i] \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ olduğunu gösteriniz.
- 4-) Düzlemde $A = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ noktası verilmiş olsun. A nın düzlemde θ açısı kadar döndürülmesinden yararlanarak, düzlemde dönme matrisini oluşturunuz.

BAŞARILAR

Adı Soyadı
Numara

1	2	3	4	5	TOPLAM

4.1.2001

DİFERENSİYEL GEOMETRİ ARASINAV SORULARI

1-) α , E^3 de düzlemsel bir eğri ise eğrinin burulması $\tau = 0$ dir.

2-) a) E^n ve E^m sırasıyla n ve m -boyutlu Öklid uzayları olmak üzere $f : E^n \rightarrow E^m$ dönüşümünün bir $p \in E^n$ noktasındaki türev dönüşümünü açıklayınız.

b) $f : E^3 \rightarrow E^2$, $f(x, y, z) = (xy + z, x^2 - yz)$ dönüşümü veriliyor, $p = (2, -1, 3) \in E^3$, $v_p \in T_p(E^3)$ ve $v_p = (5, 4, -2)$ ise $f_{*p}(v_p) = ?$

3-) $\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri olsun. α nın birim teğet vektör alanı T olmak üzere, $\beta : I \rightarrow E^3$, $\beta(s) = T(s)$ eğrisine α nın teğetler göstergesi denir. Bu β eğrisinin κ_β eğriliğini α eğrisinin eğrilik κ ve burulması τ cinsinden hesaplayınız.

4-) $\alpha : I \rightarrow E^3$, $\alpha(t) = \left(2 \cos \frac{t}{\sqrt{13}}, 2 \sin \frac{t}{\sqrt{13}}, \frac{3t}{\sqrt{13}}\right)$ eğrisinin $t = \frac{\sqrt{13}\pi}{3}$ için $\alpha(t)$ noktasındaki eğrilik ve burulmasını hesaplayınız.

5-) $\alpha : [-1, 1] \rightarrow E^3$, $\alpha(t) = (0, t, 2t^2)$ eğrisinin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzeyin parametrik denklemini bulunuz.

BAŞARILAR

Adı Soyadı
Numara

1	2	3	4	5	TOPLAM

18.04.2002

DİFERENSİYEL GEOMETRİ ARASINAV SORULARI

- 1-) Her eğri kendi yay parametresi cinsinden yazılabilir. İspatlayınız.
- 2-) $f : E^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 - \frac{yz}{2}$ dönüşümü regüler midir? Açıklayınız.
- 3-) α , E^n de bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet r-ayaklarının α nın koordinat komşuluğundan bağımsız olduğunu gösteriniz.
- 4-) $\alpha : I \rightarrow E^3$, $\alpha(t) = \left(\frac{t^3}{3}, 2t^2 + 1, t \right)$ eğrisinin
- Frenet vektörlerini Gramm-schmidt yönteminden yararlanarak bulunuz.
 - Bu eğrinin $\alpha(1)$ noktasındaki Rektifiyan düzleminin denklemini bulunuz.
- 5-) $\alpha(t) = (2t, t^2 + 1, \cos t + \sin 2t)$ eğrisi boyunca bir vektör alanı tanımlayınız. Tanımladığımız bu vektör alanının α eğrisi boyunca türevini hesaplayınız. Bu türevin $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)$ noktasındaki değerini bulunuz.

BAŞARILAR

Adı Soyadı
Numara

1	2	3	4	5	TOPLAM

2003.

Diferensiyel Geometri ARASINAV Soruları

1-) a) Yöne göre türevi tanımlayınız ve $f : E^3 \rightarrow R$ fonksiyonu için kısmi türevleri yorumlayınız.

b) $f : E^n \rightarrow R$ ve $F : E^n \rightarrow E^m$ fonksiyonlarının C^r sınıfından olmalarını tanımlayınız.

2-) a) $f : E^2 \rightarrow E^3$, $f(x, y) = (x^2, y^2, xy)$ ve $g : E^3 \rightarrow E^2$, $f(x, y, z) = (z^2, xyz)$ fonksiyonları için

$$f_*, g_* \text{ ve } (g \circ f)_*$$

türev dönüşümlerini bulunuz.

b) $p = (1, 1)$ ve $v_p = (2, 3)_p \in T_p(E^2)$ için $(g \circ f)_*|_p(v_p) = (g_* \circ f_*)|_p(v_p)$ olduğunu gösteriniz.

3-) a) $Z \in \chi(E^n)$ vektör alanının $v_p \in T_p(E^n)$ tanjant vektörüne göre kovaryant türevini tanımlayınız.

$$b) Z = \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(E^n) \text{ ve } v_p \in T_p(E^n) \text{ olmak üzere,}$$

$$D_{v_p} Z = \sum_{i=1}^n v_p[z_i] \frac{\partial}{\partial x_i} |_p$$

olduğunu ispatlayınız.

4-) a) E^n 'de bir α eğrisinin Frenet-Serret r-ayaklısını tanımlayınız.

b) E^n 'de bir α eğrisinin Frenet-Serret r-ayaklısının seçilen parametreden bağımsız olduğunu gösteriniz.

5-) a) $\alpha(t) = (\cosh t, \sqrt{3} \sinh t, t + 2)$, eğrisini yay uzunluğu parametresine göre yazınız.

b) $\alpha(t)$ eğrisinin $\alpha(0)$ noktasındaki rektifiyan düzleminin denklemini bulunuz.

BAŞARILAR

Adı Soyadı
Numara

1	2	3	4	5	TOPLAM

2003.

Diferensiyel Geometri ARASINAV 2 Soruları

1-) α , E^m 'de bir eğri ve $g \in C^\infty(E^m, R)$ olsun.

$$\alpha'(t)[g] = \left. \frac{d(g \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}$$

olduğunu ispatlayınız. (25 puan)

2-) Taylor açılımından yararlanarak bir α eğrisinin,

a) eğrilığının

b) burulmasının

geometrik yorumunu yapınız.(25 puan)

3-) x, y, z , E^3 'ün koordinat fonksiyonları ve $V = xy \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y} + y^2 z \frac{\partial}{\partial z}$ ve $W = (x + z) \frac{\partial}{\partial x} + xy^2 \frac{\partial}{\partial y} + (x + y) \frac{\partial}{\partial z}$, E^3 'de iki vektör alanı olmak üzere

a) $D_V W$ 'yi hesaplayınız.

b) $p = (1, 2, -1)$ için $(D_V W)(p)$ 'yi hesaplayınız. (25 puan)

4-) $\alpha(t) = \left(\frac{2}{3} \cos t, \frac{2}{3} \sin t, \frac{\sqrt{5}}{3} t \right)$, eğrisinin oskütatör çemberinin yarıçapını ve merkezini bulunuz.
(25 puan)

BAŞARILAR

Adı Soyadı
Numara

1	2	3	4	5	TOPLAM

14.04.2004

DİFERENSİYEL GEOMETRİ ARASINAV SORULARI

1-) $\beta(t) = \left(t - 1, t^2 + 1, \frac{2}{3}t^3\right)$ eğrilik ve burulma fonksiyonları sırasıyla $\kappa_\beta(t)$ ve $\tau_\beta(t)$ olduğuna göre $\alpha(t) = (\kappa_\beta(t), \tau_\beta(t), t)$ eğrisinin $\alpha(1)$ noktasındaki *teğet* doğrusunun denklemini bulunuz. (20 PUAN)

2-) $\beta(t) = (t^2 - 1, kt^3, 2t)$ eğrisi düzlemsel bir eğri olduğuna göre k ne olmalıdır? (20 PUAN)

3-) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4$ küresi üzerinde bir α eğrisinin eğrilik fonksiyonu κ olduğuna göre, $\kappa \geq \frac{1}{2}$ olduğunu ispatlayınız. (20 PUAN)

4-) a) Bir W vektör alanının bir tanjant vektöre göre kovaryant türevini tanımlayınız.

b) $W = (x - y) \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y} + xz \frac{\partial}{\partial z}$ vektör alanı ve $v_p = (2, 1, -3)|_{(1,1,1)}$ tanjant vektörü için $D_{v_p} W$ kovaryant türevini hesaplayınız. (20 PUAN)

5-) Z, E^n de bir vektör alanı, $v_p, w_p \in T_p(E^n)$ ve $\lambda, \beta \in R$ olmak üzere,

$$D_{\lambda v_p + \beta w_p} Z = \lambda D_{v_p} Z + \beta D_{w_p} Z$$

olduğunu ispatlayınız. (20 PUAN)

BAŞARILAR